Prof. Ing. Paolo Saija

LEZIONI DI TOPOGRAFIA

(Appunti per l'esame di abilitazione alla professione di Geometra)

ANNO 2006 – II^a EDIZIONE

SOMMARIO

1. LA TOPOGRAFIA

La topografia è una tecnica utilizzata per il rilievo e la rappresentazione grafica del terreno.

Per effettuare delle misurazioni bisogna riferire sempre la superficie fisica della terra ad un piano orizzontale.

Prima di passare allo studio vero e proprio del rilievo topografico è necessario disporre di alcuni elementi preliminari.

1.1 GRANDEZZE GEOMETRICHE ED UNITA' DI MISURA

In topografia le grandezze misurabili, di tipo geometrico, sono le lunghezze, le superfici e gli angoli.

a) L'unità di misura per le lunghezze è il metro (m);
b) L'unità di misura per le superfici è il metro quadrato (mq);
c) L'unità di misura degli angoli dipende dal diverso tipo di sistema di misura utilizzato (vedi tabella seguente);

SISTEMA	ANGOLO PIATTO	SOTTOMULTIPLI
Sessagesimale	180°	Primi e secondi
Sessadecimale	180°	Decimi, centesimi, millesimi e decimillesimi
Centesimale	200^c	Decimi, centesimi, millesimi e decimillesimi
Radiante	3,14159	

Oltre a questi sistemi di misura ne esistono altri (sistema orario, millesimale) poco utilizzati nella pratica topografica.

1.2 TRASFORMAZIONE DEGLI ANGOLI

Per trasformare un angolo da un sistema all'altro basta applicare, a seconda dei casi, la seguente proporzione:

$$\frac{\alpha^\circ}{180^\circ} = \frac{\alpha^c}{200^c} = \frac{\alpha^\pi}{\pi}$$

Nel caso di angolo sessagesimale bisogna prima trasformarlo in sessadecimale e poi procedere negli altri sistemi.

Queste trasformazioni, una volta capito il principio, vengono fatte in maniera molto più rapida utilizzando le calcolatrici scientifiche.

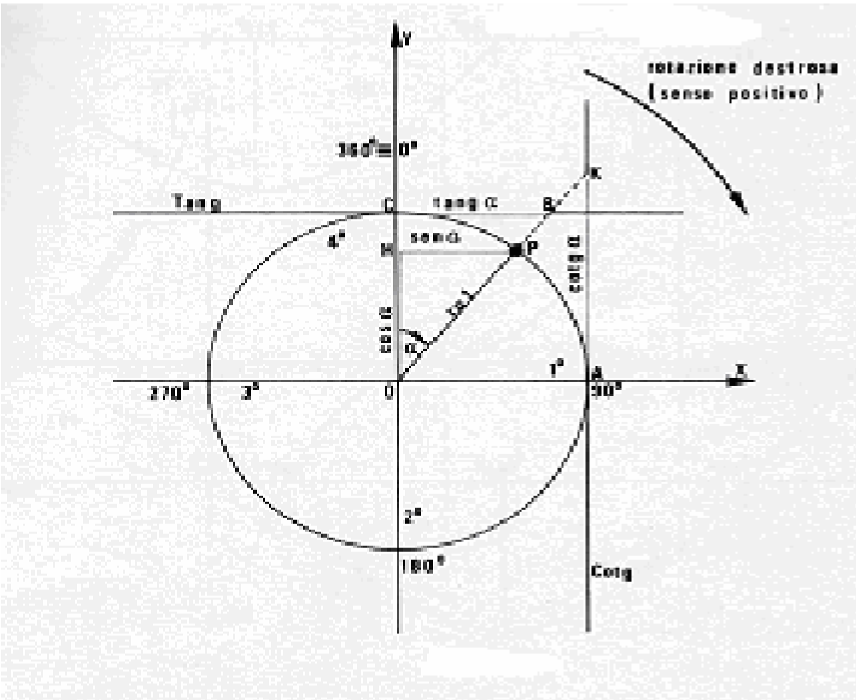
1.3 CENNI DI TRIGONOMETRIA

Molti dei problemi che si incontrano in topografia vengono risolti utilizzando la trigonometria piana che è una parte di matematica che utilizza delle funzioni angolari; questi problemi venivano prima normalmente risolti con la geometria (teorema di Pitagora, teoremi di Euclide, ecc.).

L'uso della trigonometria, anziché della geometria, deriva dal fatto che in topografia, almeno fino a qualche decennio addietro, veniva privilegiata la misurazione degli angoli rispetto a quelle delle distanze in virtù degli strumenti a disposizione.

DEFINIZIONE: *si definisce circonferenza o cerchio trigonometrico quella circonferenza avente il centro coincidente con l'origine di un sistema di assi cartesiani ortogonali x y ed il raggio uguale a 1.*

Il sistema di assi divide il piano e la circonferenza in quattro quadranti, numerati in senso orario a partire dall' asse positivo delle y.
(vedi fig. 1).



(Fig. 1)

1.4 FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

Preso un punto P sulla circonferenza trigonometrica in fig. 2 e considerato il triangolo rettangolo OPP':

a) *Si definisce seno di alfa il rapporto fra il cateto opposto e l'ipotenusa* sen α =PP'/R; da questa relazione, essendo il raggio pari a 1, consegue che il seno dell'angolo coincide con l'ascissa del punto P;

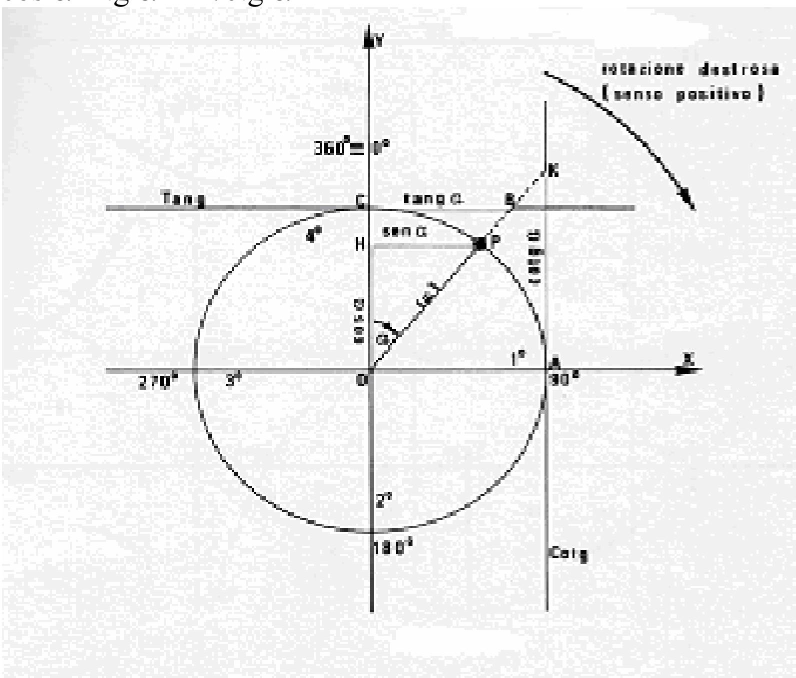
b) *Si definisce coseno di alfa il rapporto fra il cateto adiacente e l'ipotenusa* cos α =OP' /R (nel nostro caso, per quanto sopra, il coseno coincide con l'ordinata del punto P).

Le funzioni seno e coseno variano al variare dell’angolo e per questo vengono dette funzioni trigonometriche.

Le altre due funzioni utilizzate in trigonometria sono la tangente e la cotangente che possono ricavarsi facilmente dalla fig. 2.

Importanti sono le relazioni che legano la tangente al seno ed al coseno ed alla cotangente.

$tg\ \alpha = sen\ \alpha / \cos\ \alpha \quad tg\ \alpha = 1/ctg\ \alpha$



(Fig. 2)

1.5 ***FUNZIONI INVERSE***

Essendo le funzioni goniometriche univoche, se ad un angolo corrisponde un valore della funzione significa che ad un valore della funzione dovrà corrispondere un angolo.

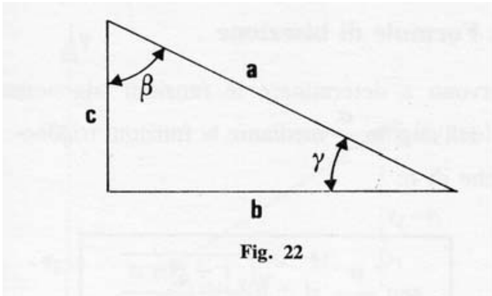
Tali funzioni inverse vengono chiamate arc sen, arc cos, arctg e servono a ricavare il valore dell’angolo conoscendo il valore della funzione.

Esempio: $sen\ \alpha = 0{,}7128$

$\alpha = arc\ sen\ 0{,}7128 = \ldots\ldots\ldots$

1.6 TEOREMI SUI TRIANGOLI RETTANGOLI

Questi importanti teoremi derivano dall'applicazione delle definizioni di seno, coseno e tangente ad un qualsiasi triangolo rettangolo (vedi fig. 3)



(Fig. 3)

$\text{sen}\,\gamma = c/a \qquad\qquad \text{sen}\,\beta = b/a$

da dove segue che $c = a * \text{sen}\,\gamma$ e $b = a * \text{sen}\,\beta$

"*in un triangolo rettangolo un cateto è dato dal prodotto dell'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto*"

$\cos\gamma = b/a \qquad\qquad \cos\beta = c/a$

da dove segue che $b = a * \cos\gamma$ e $c = a * \cos\beta$

"*in un triangolo rettangolo un cateto è dato dal prodotto dell'ipotenusa per il coseno dell'angolo adiacente*"

$\text{tg}\,\gamma = \text{sen}\,\gamma/\cos\gamma = c/b$

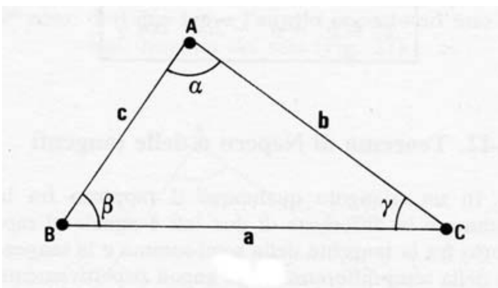
da dove segue che $c = b * \text{tg}\,\gamma$

"*in un triangolo rettangolo un cateto è dato dal prodotto dell' altro cateto per la tangente dell'angolo opposto (o per la cotangente dell'angolo adiacente)*".

E' importante notare come in un triangolo rettangolo le funzioni seno e coseno legano un cateto e l'ipotenusa, mentre la tangente e la cotangente legano i due cateti fra loro.

1.7 TEOREMA DEI SENI

Questo teorema si applica ad un triangolo qualunque e permette, conoscendo almeno tre elementi, di cui almeno due opposti fra loro, di trovare tutti gli altri elementi incogniti del triangolo:



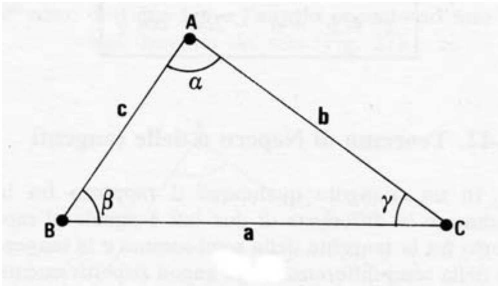
(Fig. 4)

$a/\text{sen}\,\alpha = b/\text{sen}\,\beta = c/\text{sen}\,\gamma = D$

"*in un triangolo qualunque il rapporto fra un lato e il seno dell'angolo opposto è sempre costante e questa costante è uguale al diametro del cerchio circoscritto*" (vedi fig. 4):

1.8 TEOREMA DI CARNOT

Anche questo teorema, chiamato di Carnot o del coseno, viene applicato ad un triangolo qualunque nei casi in cui non è possibile applicare il teorema dei seni:



(Fig. 5)

$a^2 = b^2 + c^2 – 2 * b * c * \cos \alpha$

"*in un triangolo qualsiasi il quadrato di un lato è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati diminuita dal doppio prodotto di questi due lati per il coseno dell'angolo da essi formato*"(vedi fig. 6)

Conoscendo i tre lati, il teorema può essere applicato in maniera inversa e risalire al valore dell'angolo:

$\cos \alpha = (b^2 + c^2 – a^2)/(2 * b * c)$

1.9 AREA DI UN TRIANGOLO

Per trovare l'area di un triangolo possono essere utilizzate diverse formule che dipendono dai dati a disposizione:

a) $S = \sqrt{p * (p-a) * (p-b) * (p-c)}$ dove p è il semiperimetro. (quando si conoscono i tre lati) (FORMULA DI ERONE)

b) $S = (b * c * \text{sen}\ \alpha)/2$ (quando si conoscono 2 lati e l'angolo compreso);

c) $S = a^2/2 * (\text{ctg}\ \beta + \text{ctg}\ \gamma)$ (quando si conoscono un lato e i due angoli adiacenti)

1.10 RISOLUZIONE DEI TRIANGOLI

Come prima detto mediante la trigonometria è possibile risolvere i triangoli cioè trovare gli elementi incogniti partendo da quelli noti.

E' possibile risolvere un triangolo se sono noti almeno tre elementi, di cui almeno un lato, dei sei elementi che lo compongono. Solo nel triangolo rettangolo è possibile procedere con soli due elementi poiché si conosce già l'angolo retto:

I casi che in pratica si possono verificare sono:

a) Triangolo rettangolo: due cateti
Ipotenusa e cateto;
Cateto ed un angolo acuto;
Ipotenusa ed un angolo acuto.

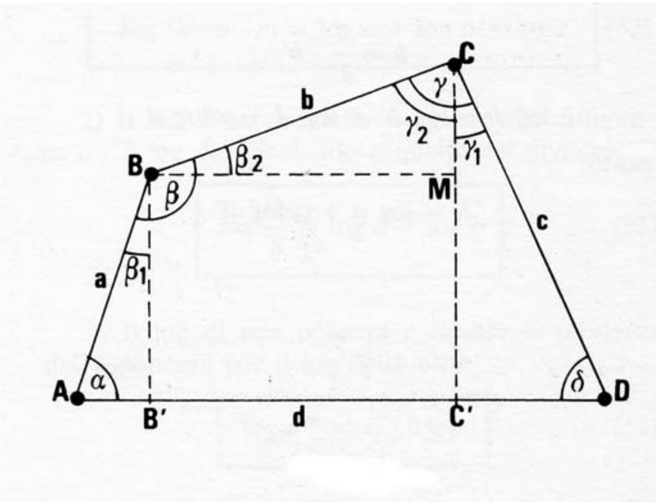
b) Triangolo qualsiasi: tre lati

Due lati e l’angolo compreso;
Due lati e l’angolo opposto;
Un lato e due angoli;
L’area, un lato ed un angolo adiacente.

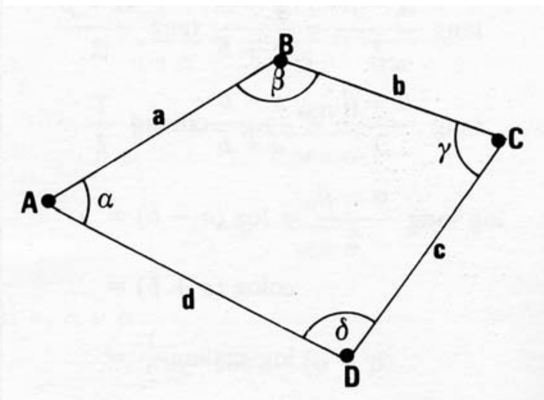
1.11 ***RISOLUZIONE DEI QUADRILATERI***

Nel caso di risoluzione di quadrilateri si possono verificare generalmente due casi che dipendono dai dati di partenza; in ogni caso necessitano sempre 5 elementi per poterlo risolvere:

- ✓ Se si conoscono tre lati e i due angoli esterni il quadrilatero si divide in triangoli rettangoli e dalla risoluzione di questi si giunge alla risoluzione dell’intero quadrilatero (vedi fig. 6);
- ✓ Se si conoscono due lati e tre angoli o altri cinque dati diversi dal primo caso il quadrilatero viene diviso in due triangoli qualsiasi (vedi fig. 7);



(Fig. 6)



(Fig. 7)

Per quanto riguarda il calcolo dell’area si può procedere considerando separatamente i due triangoli qualsiasi o i triangoli rettangoli derivanti dalle suddivisioni del quadrilatero sopra descritte, oppure con la formula di camminamento che si può applicare quando si conoscono 3 lati ed i 2 angoli compresi:

$$2S = a * b * \text{sen}\,\beta + b * c * \text{sen}\,\gamma - a * c * \text{sen}\,(\beta + \gamma)$$

\2. *I RILIEVI TOPOGRAFICI*

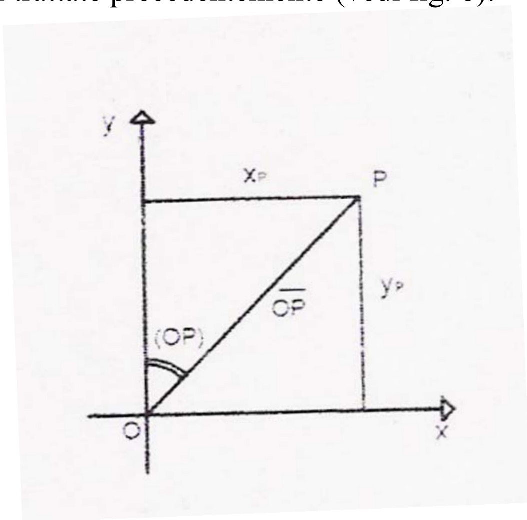
2.1 LE COORDINATE CARTESIANE E POLARI

Per poter individuare la posizione di un punto sul piano è necessario conoscere le sue coordinate. In topografia esistono due tipi di coordinate:

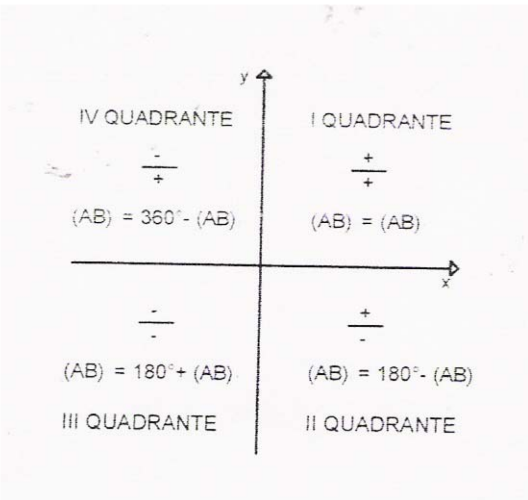
- ✓ Cartesiane (ascissa ed ordinata rispetto ad un sistema di assi cartesiani ortogonali);
- ✓ Polari (azimut e raggio vettore rispetto ad un asse polare y avente origine nel punto O).

E' possibile effettuare la trasformazione da un sistema di coordinate all'altro mediante delle formule derivanti dai teoremi sui triangoli rettangoli trattate precedentemente (vedi fig. 8):

$X_P = \overline{OP}\ \text{sen}\ (OP)$
$Y_P = \overline{OP}\ \cos\ (OP)$
$(OP) = \text{arctg}\ X_P/Y_P$
$\overline{OP} = X_P/\text{sen}(OP)$
$(OP) = \text{arctg}\ X_p\text{-}X_o/Y_p\text{-}Y_o$
$\overline{OP} = X_P\text{-}X_O/\text{sen}\ (OP)$



(Fig. 8)

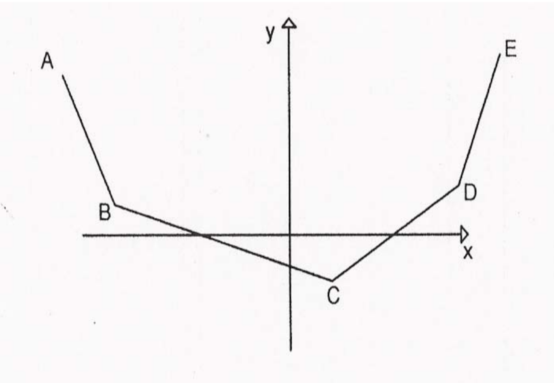


Quando si calcola il valore dell'azimut bisogna sempre vedere prima in quale quadrante cade e questo dipende dal segno di numeratore e denominatore. Si possono dunque verificare quattro casi (vedi fig. 9):

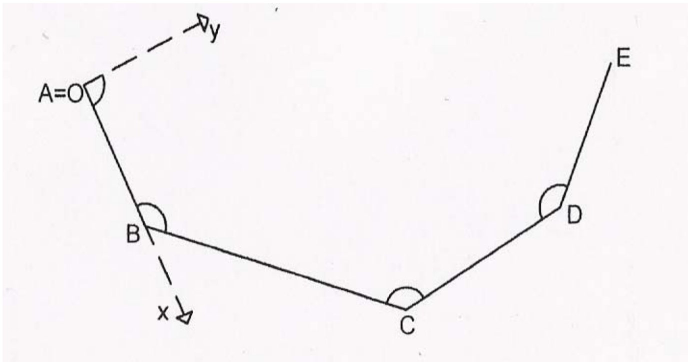
1) +/+ siamo nel primo quadrante e l'azimut calcolato è quello vero;
2) +/- siamo nel secondo quadrante e l'azimut sarà dato da 180° meno l'angolo calcolato;
3) -/- siamo nel terzo quadrante e l'azimut sarà dato da 180° più l'angolo calcolato;
4) -/+ siamo nel quarto quadrante e l'azimut sarà dato da 360° meno l'angolo calcolato;

2.2 LE POLIGONALI

La poligonale è uno dei metodi di rilievo planimetrico maggiormente utilizzato nella pratica topografica soprattutto per la rapidità di applicazione e la possibilità di adattarle a qualsiasi tipo di terreno. Vengono classificate in poligonali aperte e chiuse, in poligonali principali e secondarie, in poligonali orientate e non orientate (figg. 10 e 11).



(Fig. 10)



(Fig. 11)

Per poter risolvere una poligonale è necessario conoscere la misura di tutti i lati, tutti gli angoli interni, il primo azimut e le coordinate del primo punto. Per una poligonale non orientata basta prendere un sistema di riferimento a nostra convenienza e possiamo risolvere la poligonale solo conoscendo la misura dei lati e degli angoli.

L'unica difficoltà che abbiamo nelle poligonali è che non possiamo sempre controllarle ed eventualmente poter eliminare possibili errori nelle misurazioni di angoli e distanze.

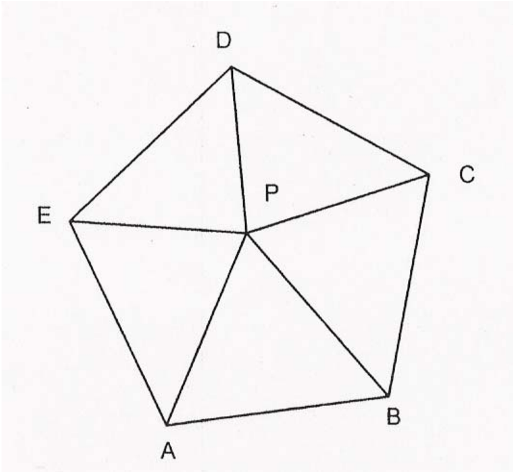
Prima di passare al calcolo delle coordinate totali è necessario calcolare tutti gli azimut successivi al primo mediante la regola di propagazione degli azimut.

2.3 LE TRIANGOLAZIONI

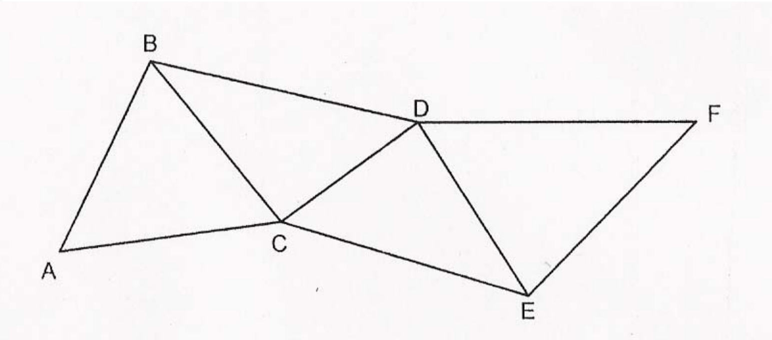
Le triangolazioni sono pure un metodo per il rilievo planimetrico e state usate dall'IGM di Firenze per il rilievo del territorio nazionale.

Si possono classificare in triangolazioni a rete ed a catena (figg. 12 e 13) e per poterle risolvere occorre conoscere tutti gli angoli interni dei triangoli ed almeno un lato (base). Mediante il teorema dei seni si calcolano tutti gli altri lati e dunque le coordinate dei vertici.

Esse sono facilmente controllabili ed eventuali errori, se inferiori alla tolleranza, possono essere compensati. Lo scopo è sempre quello di determinare le coordinate dei vertici dei triangoli per poter effettuare infine il rilievo.



(Fig. 12)



(Fig. 13)

2.4 <u>LE TRILATERAZIONI</u>

Anche questo è un metodo di rilievo planimetrico, molto simile alle triangolazioni, che privilegia la misura dei lati dei triangoli in cui è stato suddiviso il nostro terreno. Questo metodo viene utilizzato anche nella pratica quotidiana per rilevare piccoli terreni mediante la misura di sole distanze.

Negli anni precedenti, invece, venivano preferite le triangolazioni perché la misura degli angoli veniva fatta con più facilità e precisione mentre con l'avvento dei nuovi strumenti la misura delle distanze è diventata altrettanto semplice e precisa.

2.5 <u>LE INTERSEZIONI</u>

Le intersezioni rappresentano l'ultimo dei metodi di rilievo planimetrico e si utilizzano spesso per trovare la posizione di punti di dettaglio in un rilievo.

Il loro uso è subordinato alla conoscenza di alcuni punti di coordinate note e alla misurazione di altri elementi planimetrici.

Si possono classificare in:

a) Intersezioni semplici in avanti e laterali;
b) Intersezioni multiple in avanti e laterali;
c) Intersezioni inverse (problema di Pothenot);
d) Intersezione inversa doppia (problema d Hansen).

L'applicazione di un metodo piuttosto che un altro dipende dalle condizioni del terreno, dai dati di partenza e dagli elementi che è possibile misurare

2.6 ***LE LIVELLAZIONI***

La livellazione consiste nella misura del dislivello (differenza di quota) fra due o più punti al fine di determinare la loro quota.

La quota di un punto viene definita come la sua altezza rispetto ad una superficie di riferimento che generalmente viene presa sulla superficie del mare.

Determinare le quote significa aver completato il rilievo con la terza coordinata ed essere dunque nella possibilità di procedere alla rappresentazione grafica del rilievo effettuato

La rappresentazione del terreno può essere fatta per piani quotati o per carte a curve di livello a seconda dell'estensione del terreno e del numero di punti occorrenti.

Le livellazioni vengono fatte in diversi modi a seconda dello strumento utilizzato:

a) Livellazione trigonometrica reciproca e da un estremo (teodolite);
b) Livellazione tacheometrica (tacheometro);
c) Livellazione geometrica (livello).
d) Livellazione per coltellazione (triplometro);
e) Livellazione barometrica (barometro);

Queste misurazioni dipendono anche dalla distanza fra i punti e dalla natura del terreno.

2.7 ***LA CELERIMENSURA***

E' comunque possibile effettuare contemporaneamente il rilievo planimetrico ed altimetrico di un terreno mediante una tecnica chiamata celerimensura.

Utilizzando un tacheometro e la stadia si possono trovare le tre coordinate spaziali di ogni punto mediante le seguenti formule:

- (Distanza nota) **Xp** $= D * \text{sen}\ \theta$ **Yp** $= D * \text{sen}\ \theta$ **Zp**$= D * \text{ctg}\ \varphi + (h\text{-}l)$
- (Distanza non nota) **Xp** $= K * S * \text{sen}^2\ \varphi * \text{sen}\ \theta$ **Yp** $= K * S * \text{sen}^2\ \varphi * \cos\theta$
- **Zp**$= K * S * \text{sen}\ \varphi * \cos\varphi + (h\text{-}l)$

2.8 ***DISEGNO DI UN RILIEVO***

Una volta completato il rilievo è possibile rappresentarlo graficamente mediante due tipi di disegno:

- Per piani quotati;
- Per carte a curve di livello.

Viene utilizzato un piano quotato quando i punti che ci interessano sono in numero limitato per cui il terreno viene rappresentato dividendolo in falde triangolari e conoscendo le quote dei vertici di tali falde. Questo tipo di rilievo viene fatto in modo classico con la celerimensura facendo stazione un punto dominante interno dal quale si possono battere tutti gli altri vertici.

Si usano le carte a curve di livello invece quando i punti di dettaglio occorrenti sono numerosi e/o l'estensione del terreno rilevato è abbastanza grande. Vengono utilizzate soprattutto per la redazione degli strumenti urbanistici, per la redazione di progetti stradali, per planimetrie dettagliate, ecc. Queste carte sono costituite da un insieme di curve (isoipse) i cui punti hanno tutti la stessa quota. L'equidistanza fra due curve di livello dipende dalla scala (per esempio per una carta 1:2000 l'equidistanza è m. 2).

Le carte a curve di livello vengono normalmente realizzate mediante aerofotogrammetria, ma è possibile pure (per piccoli terreni) ottenerle operando su un piano quotato precedentemente disegnato.

3. AGRIMENSURA

L'agrimensura è quella parte di topografia che si occupa della misura dei terreni, della loro divisione e dello spostamento e rettifica dei confini. Prima di passare alla descrizione di questi problemi è necessario precisare che con l'avvento dei nuovi strumenti di misurazione (stazioni totali) molte cose sono cambiate ed i calcoli necessari si sono abbondantemente semplificati.

3.1 MISURA DELLE AREE

Per la misura delle aree esistono in topografia quattro metodi:

- Metodi analitici;
- Metodi grafici;
- Metodi grafo-numerici;
- Metodi meccanici.

I metodi analitici sono i più precisi, ma anche i più laboriosi. Fra quelli maggiormente usati ricordiamo il metodo per allineamenti, per trilaterazioni, per coordinate cartesiane (formula di Gauss) e per coordinate polari.

I metodi grafici consistono nel trasformare graficamente figure più complesse in figure semplici (triangoli o quadrilateri). Fra questi metodi viene molto spesso usata l'integrazione grafica.Fra i metodi grafo-numerici sono molto utilizzati il metodo di Bezout e di Cavalieri-Simpson soprattutto quando il terreno ha una forma curvilinea.I metodi meccanici sono invece scarsamente utilizzati a causa della scarsa precisione che con essi si ottiene.

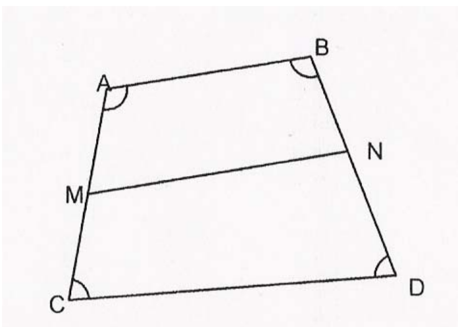
3.2 DIVISIONE DELLE AREE

Le divisioni dei terreni sono un problema classico per la professione del geometra. Innanzitutto si deve distinguere sempre se si è in presenza di un terreno a valore unitario costante (si assume come parametro di riferimento la superficie) o a valore unitario diverso (si assume come parametro di riferimento il valore).

I casi che si possono verificare nella pratica sono molteplici e dipendono sia dalla forma del terreno sia dal modo con cui esso si vuole dividere.

Frequentemente si verificano tre casi che vengono così risolti:

- triangoli aventi la stessa altezza: *"le aree dei triangoli stanno fra di loro come i rispettivi lati omologhi";*
- triangoli simili: *"le aree dei triangoli stanno fra di loro come i rispettivi lati omologhi al quadrato);*
- problema del trapezio (fig. 14)
  - formula risolutiva: $(\text{ctg}\ \alpha + \text{ctg}\ \beta) * h^2 - 2 * a * h + 2 * S_1 = 0$



(Fig. 14)

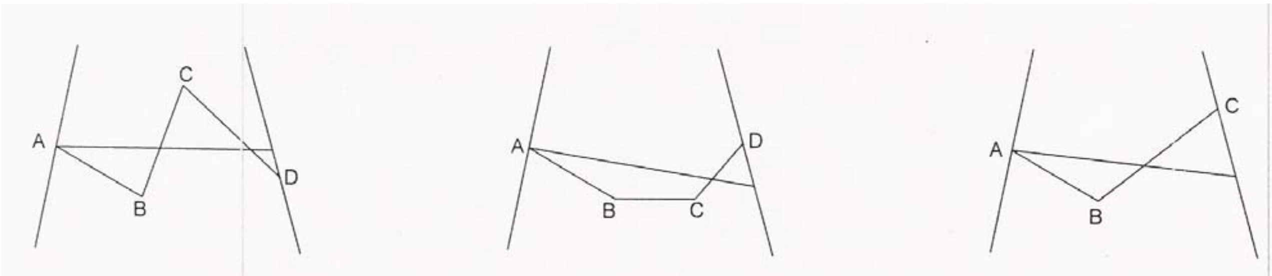
3.3 ***SPOSTAMENTO E RETTIFICA DEI CONFINI***

A volte può essere opportuno o conveniente procedere allo spostamento o alla rettifica di un confine al fine di migliorarne la coltivabilità o la possibilità di meglio sfruttarlo dal punto di vista edificatorio.

Anche in questi casi si opera quasi sempre con terreni a valore unitario costante e non si prevede alcun compenso in denaro per eventuali differenze di superficie prima e dopo l'operazione topografica.

I casi che si possono verificare sono anche qui molteplici e di seguito vengono rappresentati quelli più frequenti.

(Fig. 14)



a) b) c)

3.4 ***SPIANAMENTI***

Gli spianamenti sono delle operazioni effettuate sul terreno al fine di renderlo secondo un piano orizzontale o inclinato a secondo degli scopi. Durante queste operazioni si verificano sempre degli spostamenti di volumi di terra da una parte all'altra.

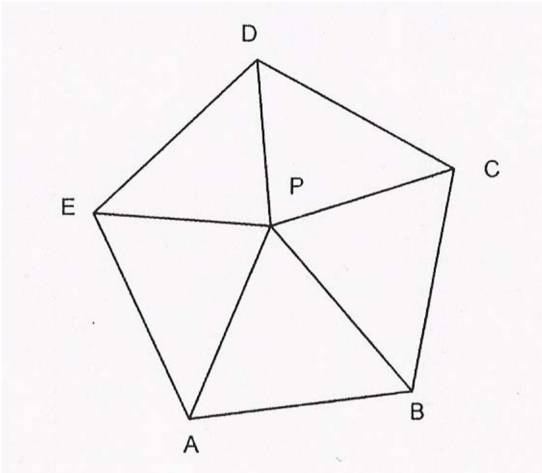
Gli spianamenti più frequenti sono:

- ✓ secondo un piano orizzontale passante per una quota assegnata;
- ✓ secondo un piano inclinato passante per tre punti;
- ✓ secondo un piano passante per due punti ed avente pendenza assegnata;
- ✓ spianamenti di compenso.

E' necessario, per procedere al calcolo dei volumi, avere il rilievo del terreno per piani quotati o con carta a curve di livello. I volumi si calcolano considerandoli come dei solidi prismatici ed applicando pertanto la relativa formula: (vedi fig. 15)

V = So * h dove:

- $h = \dfrac{a + b + c}{3}$ (per i prismi aventi base triangolare)
- $h = \dfrac{a + b + c + d}{4}$ (per i prismi aventi basi a forma di parallelogramma)



(Fig. 15)

Per risolvere un problema si spianamento è necessario seguire le seguenti fasi:

- ✓ determinazione delle quote rosse;
- ✓ determinazione dei punti di passaggio (determinazione analitica o grafica);
- ✓ determinazione della linea di passaggio (linea che separa la zona di scavo da quella di riporto);
- ✓ calcolo dei volumi di scavo e di riporto (formula dei volumi dei solidi prismatici).